M.K. LISTRIK MAGNET
JOBSHEET 11

MEDAN MAGNETOSTATIKA DALAM BAHAN

Gaya magnetik dan induksi magnetik termasuk arus yang dibahas sebelum ini dianggap berada dalam vakum. Untuk membuat kesimpulan yang lebih umum tentang kemagnetan perlu dibahas tentang sifat kemagnetan dalam bahan. Dasar-dasar tentang proses magnetisasi bahan berhubungan dengan rapat arus permukaan magnetisasi , rapat arus volume magnetisasi dan dipol magnetik. Juga dibahas mengenai medan H , suatu besaran medan yang berhubungan dengan arus bebas, dan suseptibilitas magnetik. Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa mampu menjelaskan konsep medan magnetostatika dalam bahan serta penerapannya.

6.1 MAGNETISASI

Atom dan molekul tersusun dari partikel- partikel yang bermuatan positif dan negatif yang secara listrik bersifat netral. Muatan-muatan ini bergerak dalam lintasan tertutup atau berputar pada sumbunya menghasilkan arus dan sekaligus juga dipol magnetik. Arus ini disebut arus Amperian karena pertama kali dikemukakan oleh Ampere.

Jika sebuah bahan berada dalam medan magnet B maka bahan akan terinduksi, dikatakan bahwa bahan mengalami magnetisasi. Setiap bahan yang mengalami magnetisasi akan mengandung dipol magnet. Rapat dipol magnet atau dipol magnet persatuan volume dinyatakan dalam vektor magnetisasi M, sehingga dalam unsur volume dτ bahan akan mengandung unsur momen dipol sebesar

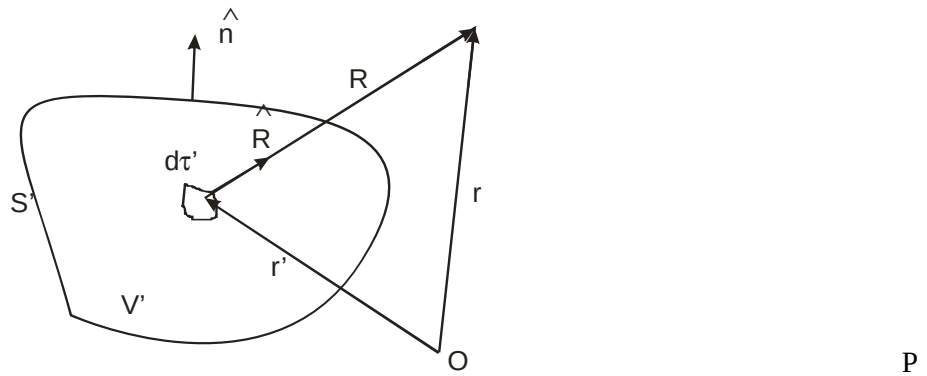
$$dm = M(r)d^2 \qquad (6\text{-}1)$$

Jumlah momen dipol total adalah

$$m = \int M(r)d^2 \qquad (6\text{-}2)$$

6.2 RAPAT ARUS MAGNETISASI

Potensial vektor yang dihasilkan oleh distribusi arus pada suatu titik P diluar bahan yang jaraknya r dari titik asal dapat dihitung sebagai berikut. Misalkan suatu bahan dengan volumeV' dan luas permukaan S' memiliki rapat momen dipol sebesar M seperti dapat dilihat pada Gambar 6.1 dibawah ini.



Gambar 6.1. Potensial vector diluar bola termagnetisasi.

Momen dipol dari volume dτ' adalah

$$dm' = M(r')d\tau' \tag{6-2}$$

Kontribusinya terhadap potensial vektor

$$dA = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dm' \times \hat{R}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dm' \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M(r') \times \mathbf{R}d\tau'}{R^3} \tag{6-3}$$

Potensial vektor pada titik P adalah

$$A(r) = \int_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M(r') \times \hat{R}\,d\tau'}{R^2} = \int_{V'} M(r') \times \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)d\tau' \tag{6-4}$$

Integran pada (6-4) dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{M} \times \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R}\right) \tag{6-5}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{(\nabla' \times M)d\tau'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\left[-\nabla' \times \left(\frac{M}{R}\right)\right]d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{(\nabla' \times M)d\tau'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'} \frac{M \times n'da'}{R} \end{aligned} \tag{6-6}$$

Persamaan (6-6) diperoleh dari hukum integral

$$\oint_S A \times da = -\int_V (\nabla \times A)d\tau$$

Kalau diperhatikan persamaan (6-6) maka dapat diambil kesimpulan bahwa potensial di titik P ditimbulkan oleh 2 jenis distribusi arus yaitu rapat arus volume magnetisasi (J_m) dan rapat arus permukaan magnetisasi (K_m), dimana diperoleh bahwa

$$J_m = \nabla' \times M \tag{6-7}$$

dan

$$\mathbf{K}_m = M \times \hat{n}' \tag{6-8}$$

dimana subskrip m menyatakan rapat arus magnetisasi.

Diperoleh

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{J_m(r')d\tau'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'} \frac{K_m(r')da'}{R} \tag{6-9}$$

Secara umum persamaan (6-7) dan (6-8) dapat ditulis sebagai

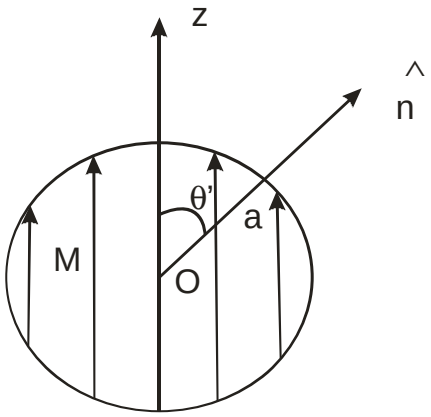
$$Jm = \nabla \times M$$
$$Km = M \times \hat{n} \qquad (6\text{-}10)$$

Induksi magnetik B di luar bahan dapat ditentukan dari **B = ∇ x A** sehingga diperoleh

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{J_m(r') \times \hat{R}\, d^2 r'}{R^2} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'} \frac{K_m(r') \times \hat{R}\, da'}{R^2} \qquad (6\text{-}11)$$

6.3 BOLA TERMAGNETISASI SERAGAM

Tinjau sebuah bola dengan radius a memiliki magnetisasi konstan **M**. Pilih sumbu z sebagai arah **M** dan titik asal pada pusat bola. Jadi $\mathbf{M} = M\hat{z}$ dan $J_m = 0$. Dari Gambar 6.2 terlihat bahwa $\hat{n} = \hat{r}'$.



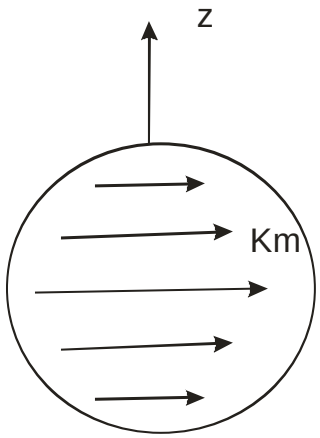
Gambar 6.2. Bola termagnetisasi seragam.

Rapat arus permukaan

$$K_m = M\hat{z} \times \hat{r}' = M \sin\theta' \hat{\phi} \qquad (6\text{-}12)$$

seperti dapat dilihat pada Gambar 6.3. Jika persamaan (6-12) dimasukkan kedalam persamaan (6-11) diperoleh

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 M a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\hat{\phi}' \times R)\sin^2\theta' d\theta' d\phi'}{R^3} \qquad (6\text{-}13)$$



Gambar 6.3 Arus permukaan ekivalen dari bola termagnetisasi seragam.

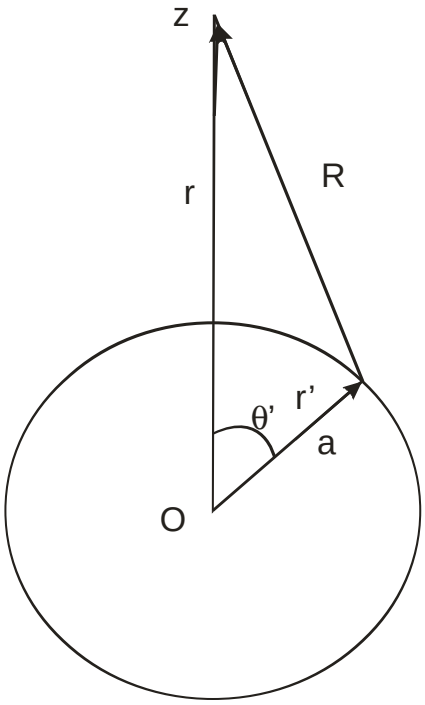
Dari Gambar 6.4 terlihat bahwa

$$r = z\hat{z},\ r' = a\hat{r}',\ R = z\hat{z} - a\hat{r}',\ R = \left(z^2 + a^2 - 2za\cos\theta'\right)^{1/2}$$

dan

$$\hat{\theta}' \times \mathbf{R} = z\sin\theta'\hat{r}' + (z\cos\theta' - a)\hat{\theta}'$$

$$= a\sin\theta'\hat{z}' + (z - a\cos\theta')(\hat{x}\cos\theta' + y\sin\hat{\theta}')$$



Gambar 6.4. Perhitungan induksi magnetik pada titik sepanjang sumbu z.

Dengan memasukkan ini ke dalam persamaan (6-13) diperoleh bahwa komponen $\hat{x}$ dan $\hat{y}$ saling menghapuskan, sehingga hanya komponen $\hat{z}$ yang merupakan induksi magnetik total,

$$\mathbf{B}_z(z) = \frac{«_0 M a^3}{4®} \int_0^{2®} \int_0^{®} \frac{\sin^3 — ' d — ' d ¨ '}{\left(z^2 + a^2 - 2za\cos — '\right)^{3/2}} \tag{6-14}$$

Dengan menggunakan $\sin^2 — ' = 1 - \cos^2 — '$ dan $\int_0^{®} f(\cos — ')\sin — ' d — ' = \int_{-1}^{1} f(u)du$ diperoleh

$$\mathbf{B}_z(z) = \frac{«_0 M a^3}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(1-u^2)du}{\left(z^2 + a^2 - 2za\cos — '\right)^{3/2}} \tag{6-15}$$

Hasil integral dengan menggunakan tabel integral diperoleh

$$\frac{-2(z^2 + a^2 - 2zau)}{3z^3 a^3}\left[\frac{z^2 + a^2 + zau + 3z^2 a^2 (u^2 - 1)}{(z^2 + a^2 - 2zau)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3z^3 a^3}\left\{\left(z^2 + a^2\right)\left[|z+a| - |z-a|\right] - za\left[|z+a| + |z-a|\right]\right\} \tag{6-16}$$

Tinjau 2 kasus :

1. Di luar bola : Disini z > a sehingga | z-a | = z-a dan (6-16) menjadi $4/3z^3$. Dengan demikian (6-15) menjadi

$$\mathbf{B}_{zo}(z) = \frac{2«_0 M a^3}{3z^3} \tag{6-17}$$

Jika dipol momen total

$$m = \frac{4® a^3 M}{3} \tag{6-18}$$

maka induksi magnetik di luar bola menjadi

$$\mathbf{B}_{zo}(z) = \frac{«_0}{4®}\frac{2m}{z^3} \tag{6-19}$$

2. Di dalam bola : Disini z < a sehingga | z-a | = a-z dan (6-16) menjadi $4/3a^3$. Dengan demikian (6-15) menjadi

$$\mathbf{B}_{zo}(z) = \frac{2«_0 M}{3} \tag{6-20}$$

Jawablah pertanyaan berikut ini bersama kelompokmu. Gunakan referensi yang relevan.

6.1 Sebuah silinder panjang takhingga mempunyai magnetisasi seragam **M** paralel dengan sumbunya. Carilah induksi magnetik di dalam dan di luar silinder.

6.2 Sebuah silinder panjang dengan jari-jari R mempunyai magnetisasi $M = k\rho^2\hat{\varphi}$ di mana k adalah tetapan dan ρ adalah jarak dari sumbu. Carilah induksi magnetik di dalam dan di luar silinder.

6.3 Sebuah silinder panjang tak hingga, jari-jari R dimagnetisasi sejajar sumbu sebesar

$$M = k\rho$$

Dimana k adalah tetapan dan ρ adalah jarak dari sumbu (tidak ada arus bebas dimanapun). Carilah induksi magnetik di dalam dan di luar silinder.

6.4 Sebuah kubus dengan panjang sisi a salah satu titik sudut terletak pada titik asal (0,0,0). Dalam bahan terdapat magnetisasi

$$M = -\left(\frac{M}{a}\right)y\hat{x} + \left(\frac{M}{a}\right)x\hat{y}$$

dimana M adalah konstanta. Carilah rapat arus J_m dan K_m.

6.5 Sebuah bola dengan jari-jari a dengan titik pusatnya berada pada titik asal. Magnetisasinya tidak seragam dan diberikan oleh persamaan

$$M = (\sim z^2 + \quad)\hat{z}$$

dimana α dan β adalah konstanta. Tentukan rapat arus J_m dan K_m.