

# M.K. Listrik Magnet

## Jobsheet 3

---

### ELEKTROSTATIKA

---

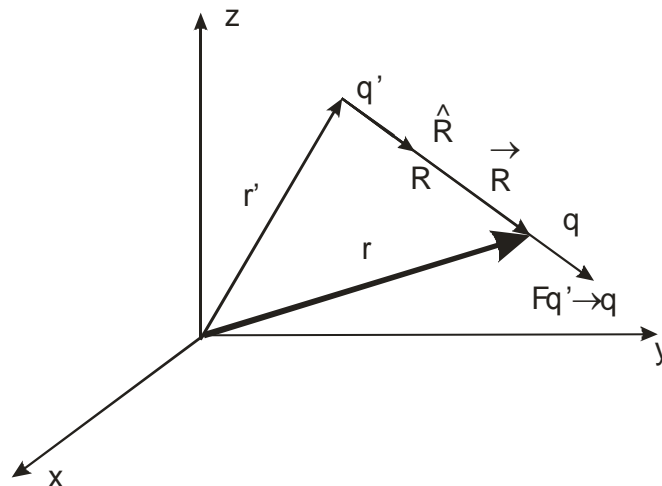
Masalah utama yang dibahas dalam elektrostatika adalah gaya-gaya listrik yang dialami oleh suatu muatan  $Q$  (disebut muatan uji) yang dikerjakan oleh satu atau sekumpulan muatan  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  atau oleh suatu distribusi muatan kontinu (disebut muatan sumber) yang berada disekitar muatan  $Q$  tersebut. Sehubungan dengan gaya-gaya listrik ini kemudian juga dihitung kuat medan listrik di titik dan potensial dimana muatan  $Q$  itu berada.

#### 2.1 HUKUM COULOMB

Charles Augustin de Coulomb telah meneliti gaya-gaya yang bekerja pada suatu muatan (muatan uji) yang dikerjakan oleh muatan-muatan lain (muatan sumber) yang berada disekitar muatan uji tersebut. Jika ada 2 muatan uji  $q_1$  dan  $q_2$  mengalami gaya  $F_1$  dan  $F_2$  ternyata perbandingan kedua gaya-gaya tersebut adalah

$$\frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{|F_1|}{|F_2|} \quad (2-1)$$

Misalkan suatu muatan  $q'$  (muatan sumber) yang berada pada jarak  $r'$  dari titik asal mengerjakan gaya  $F$  pada muatan  $q$  (muatan uji) yang berada pada jarak  $r$  dari titik asal seperti dapat dilihat pada Gambar 2.1. Dari Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa



Gambar 2.1 Gaya yang dialami oleh muatan  $q$  yang ditimbulkan oleh muatan sumber  $q'$ .

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$
$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R} \quad (2-2)$$

Dari Gambar di atas dapat ditulis gaya yang dialami oleh q yang disebabkan oleh muatan sumber q' adalah

$$F_{q' \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R^2} \hat{R} \quad (2-3)$$

dimana  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ (coulomb)}^2 / \text{newton} \cdot \text{(meter)}^2$   
 $= 8,85 \times 10^{-12} \text{ farad/meter}$  (2-4)

dan  $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9 \text{ newton} \cdot \text{(meter)}^2 / \text{(coulomb)}^2$  (2-5)  
 karena  $1 \text{ farad} = 1 \text{ (coulomb)}^2 / \text{joule}$ .

Persamaan diatas adalah Hukum Coulomb untuk distribusi muatan titik. Karena

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{R}$$

Maka hukum Coulomb dapat ditulis

$$F_{q' \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq' \vec{R}}{R^3} \quad (2-6)$$

Untuk gaya yang dikerjakan oleh q pada q' hukum Coulomb dapat ditulis

$$F_{q \rightarrow q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q \vec{R}'}{R'^3} \quad (2-7)$$

dimana  $\mathbf{R}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$

Karena  $\mathbf{R}' = -\mathbf{R}$  maka

$$F_{q \rightarrow q'} = -F_{q' \rightarrow q} \quad (2-8)$$

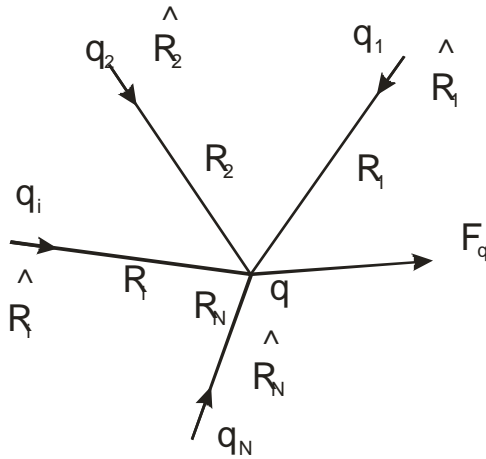
Untuk situasi kesetimbangan statik dimana muatan-muatan berada dalam keadaan diam pada suatu posisi tetap haruslah ada gaya mekanis luar tambahan yang bekerja pada muatan sehingga

$$F_{q' \rightarrow q} = F_{q,m} = 0 \quad (2-9)$$

Ini juga berlaku untuk muatan q'.

### 2.1.1 Sistem Muatan Titik

Untuk distribusi muatan titik, gaya yang dialami oleh muatan q yang disebabkan oleh gaya  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  merupakan gaya resultan oleh semua gaya yang bekerja pada q seperti dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.2 Gaya oleh sistem muatan titik.

Gaya yang dialami oleh muatan dapat ditulis,

$$F_q = \sum_{i=1}^N F_{q_i \rightarrow q} = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i \hat{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i R_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \quad (2-10)$$

dimana

$$\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i, \quad R_i = |\vec{r} - \vec{r}_i| \quad \text{dan} \quad \hat{R}_i = \frac{\vec{R}_i}{R_i} \quad (2-11)$$

Karena

$$\vec{R} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}$$

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$$

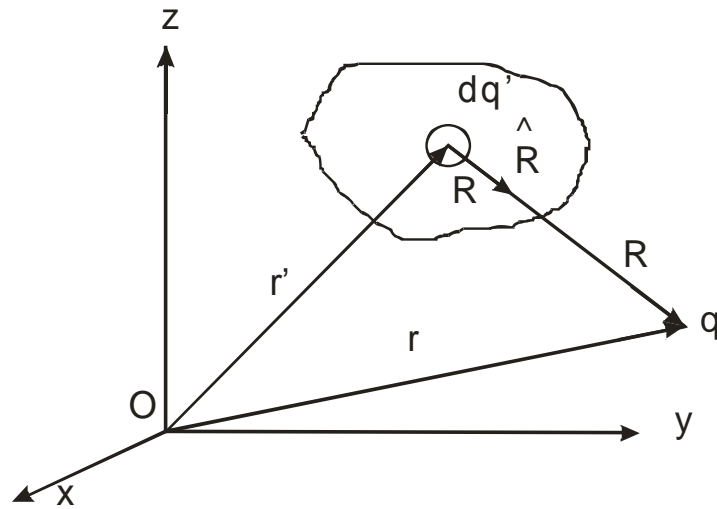
maka

$$F_q = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i [(x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}]}{4\pi\epsilon_0 [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (2-12)$$

### 2.1.2 Distribusi Muatan Kontinu

Jika muatan sumber terdistribusi dalam bentuk muatan kontinu seperti muatan garis, muatan permukaan dan muatan volume maka muatan sumber dapat dinyatakan dalam rapat muatan garis  $\lambda$  yaitu muatan persatuan panjang ( $dq/ds$ ), rapat muatan permukaan  $\sigma$  yaitu muatan persatuan luas ( $dq/da$ ) dan rapat muatan volume  $\rho$  yaitu muatan persatuan volume ( $dq/d\tau$ ). Gaya yang dialami oleh muatan  $q$  dapat dihitung sebagai berikut.

Misalkan muatan  $q$  terletak diluar suatu distribusi muatan permukaan  $\rho$  seperti dapat dilihat pada Gambar 3.1 berikut.



Gambar 2.3 Gaya oleh distribusi muatan kontinu

Gaya yang dialami oleh muatan q adalah

$$F_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq' \hat{R}}{R^2} \quad (2-13)$$

dimana

$$dq' = \rho_{ch}(r') d\tau \quad (2-14)$$

Dengan demikian (2-13) dapat ditulis,

$$F_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(r') \hat{R} d\tau}{R^2} \quad (2-15)$$

Untuk rapat muatan permukaan  $\sigma$  dan rapat muatan garis  $\lambda$  unsur muatan masing-masing adalah

$$dq' = \sigma(r') da', \quad dq' = \lambda(r') ds' \quad (2-16)$$

Gaya yang dialami oleh muatan untuk masing-masing distribusi muatan adalah

$$F_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\tau(r') \hat{R} da'}{R^2} \quad (2-17)$$

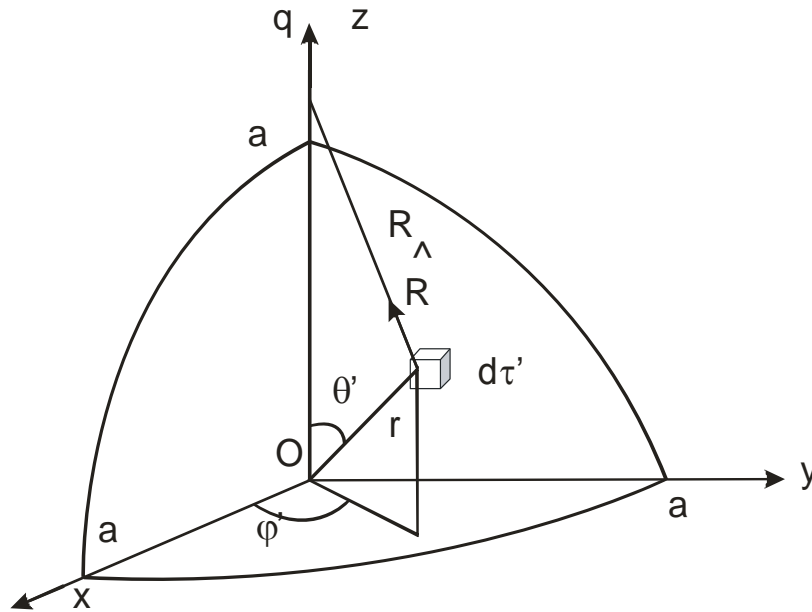
$$F_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(r') \hat{R} ds'}{R^2} \quad (2-18)$$

Jika secara simultan bekerja gaya-gaya di atas maka gaya total yang bekerja pada q adalah,

$$F_q = F_q(\text{muatan titik}) + F_q(\text{muatan volume}) + F_q(\text{muatan permukaan}) + F_q(\text{muatan garis}) \quad (2-19)$$

### 2.1.3 Muatan Titik Di Luar Distribusi Muatan Bola Seragam

Sebuah muatan titik  $q$  terletak pada sumbu  $z$  diluar sebuah muatan bola nseragam dengan kerapatan muatan  $\rho$  seperti dapat dilihat pada Gambar 2.4 dibawah ini.



Gambar 2.4 Gaya oleh distribusi muatan bola seragam.

Dapat dilihat dari Gambar 2.4 bahwa

$$\vec{r} = z \hat{z}, \quad \vec{r}' = r' \hat{r}' \quad \text{dan} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - r' \hat{r}'$$

Dengan menggunakan hukum cosinus diperoleh

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr'(\hat{z} \cdot \hat{r}') = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \phi'$$

Gaya yang dialami oleh muatan  $q$  adalah

$$\begin{aligned} F_q &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(r') \hat{R} d\tau'}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(r') R d\tau'}{R^3} \\ &= \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{(z \hat{z} - r' \hat{r}') d\tau'}{(z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \phi')^{3/2}} \end{aligned} \quad (2-20)$$

dimana  $d\tau' = r' \sin \phi' dr' d\phi' d\phi'$ . Karena faktor simetri maka  $F_{qx} = F_{qy} = 0$ .

Untuk  $F_{qz} = F_q \cdot \hat{z}$  sehingga diperoleh

$$F_{qz} = \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(z - r' \cos \phi') r' \sin \phi' dr' d\phi' d\phi'}{(z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \phi')^{3/2}} \quad (2-21)$$

Misalkan  $\mu = \cos \theta'$ ,  $d\mu = -\sin \theta' d\theta'$  sehingga

$$\int_0^\pi \sin \phi' d\phi' = \int_1^{-1} -d\mu = \int_{-1}^1 d\mu \quad (2-22)$$

Dengan demikian (2-21) dapat ditulis

$$F_{qz} = \frac{q\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^a r'^2 dr' \int_{-1}^1 \frac{(z-r'\mu)d\mu}{(z^2+r'^2-2zr'\mu)^{3/2}} \quad (2-23)$$

Dari tabel integral diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{(z-r'\mu)d\mu}{(z^2+r'^2-2zr'\mu)^{3/2}} &= \frac{(z\mu-r')}{z^2(z^2+r'^2-2zr'\mu)^{1/2}} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{z^2} \left( \frac{z-r'}{|z-r'|} + \frac{z+r'}{|z+r'|} \right) \end{aligned} \quad (2-24)$$

Muatan  $q$  di luar bola sehingga  $z > a$  ; karena  $r' \leq a$  maka  $z > r'$  sehingga  $|z-r'| = z-r'$ . Sekarang  $|z+r'| = z+r'$ , dengan demikian hasilnya adalah  $2/z^2$ . Jadi

$$F_{qz} = \frac{q\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^a r'^2 dr' \left( \frac{2}{z^2} \right) = \frac{q\rho a^3}{3\varepsilon_0 z^2} \quad (2-25)$$

## 2.2 MEDAN LISTRIK

### 2.2.1 Definisi Medan Listrik

Medan adalah sesuatu yang memiliki nilai dalam ruang. Medan dapat dibedakan atas medan vektor dan medan skalar. Medan gaya gravitasi adalah contoh medan vektor, sedangkan medan temperatur adalah contoh medan skalar. Dari persamaan (2-3)

$$F_{q' \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq' \hat{R}}{R^2}$$

dapat ditentukan kuat medan listrik pada titik ditempat beradanya muatan  $q$ . Kuat medan listrik didefinisikan sebagai besarnya gaya persatuan muatan yang dialami oleh muatan jika ditempatkan di titik tersebut,

$$E(r) = \frac{F_{q' \rightarrow q}}{q} \quad (2-26)$$

Jika dihubungkan dengan persamaan (2-10) maka (2-26) dapat ditulis sebagai

$$E(r) = \frac{F_{q' \rightarrow q}}{q} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \hat{R}_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i R_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^3} \quad (2-27)$$

Dalam koordinat Kartesian dihubungkan dengan (2-12) persamaan (2-27) dapat ditulis

$$E(r) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i [(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}]}{4\pi\epsilon_0 [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad (2-28)$$

Untuk muatan sumber berupa suatu distribusi kontinu, dihubungkan dengan persamaan (2-15), (2-17) dan (2-18) diperoleh medan listrik

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(r')\hat{R}d\tau}{R^2} \quad (2-29)$$

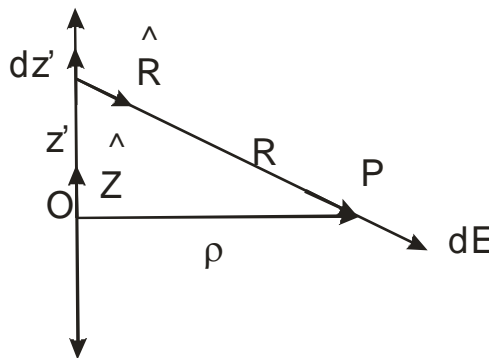
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(r')\hat{R}da'}{R^2} \quad (2-30)$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(r')\hat{R}ds'}{R^2} \quad (2-31)$$

## 2.2.2 Medan Oleh Muatan Garis Tak Hingga

Sebuah muatan garis tak hingga dengan kerapatan  $\lambda$  ditempatkan pada sumbu z. Kuat medan pada titik P( $\rho, \phi, z$ ) dapat ditentukan dengan menggunakan koordinat silindris. Dari Gambar 2.5 dapat dilihat bahwa,

$$r = \rho\hat{\rho}, \quad r' = z'\hat{z}, \quad R = \rho\hat{\rho}, \quad R = (\rho^2 + z'^2)^{1/2} \quad \text{dan} \quad ds' = dz'$$



Gambar 2.5. Medan oleh muatan garis.

Dengan demikian kuat medan pada titik P dapat ditulis sebagai

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(r')\hat{R}ds'}{R^2}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\hat{\rho}\hat{\rho} - \hat{z}'\hat{z}') dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\lambda\hat{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (2-32)$$

karena komponen  $E_z$  saling menghapus. Integran

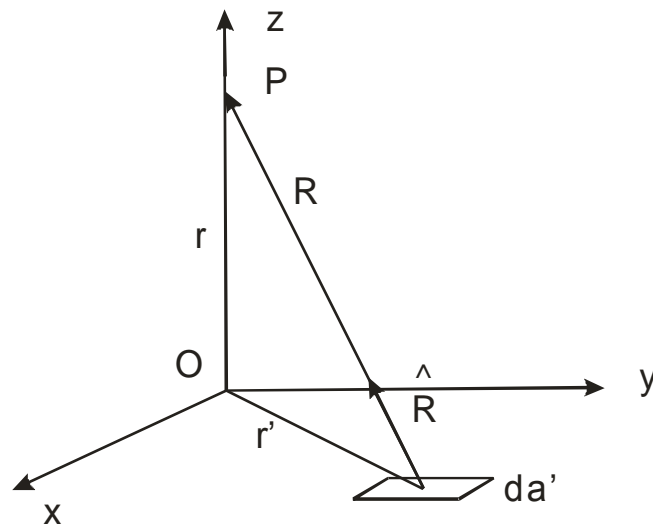
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{2}{\rho^2} \quad (2-33)$$

sehingga (2-32) menjadi

$$E(r) = \frac{\lambda\hat{\rho}}{2\pi\epsilon_0} \quad (2-34)$$

### 2.2.3 Medan Oleh Lembaran Bidang Tak Hingga

Sebuah bidang tak hingga bermuatan listrik dengan kerapatan muatan  $\sigma$ . Bidang ini terletak pada bidang xy dalam koordinat Kartesian seperti pada Gambar 2.6



Gambar 2.6. Bidang luas tak hingga bermuatan dengan rapat muatan  $\sigma$ .

Dari Gambar 2.6 dapat dilihat bahwa

$$\mathbf{r} = z\hat{z}' \quad \mathbf{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} \quad da' = dx' dy'$$

Dari persamaan (2-30) diperoleh

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x'\hat{x} - y'\hat{y} + z\hat{z}') dx' dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2-35)$$



$E_x = E_y = 0$  , karena komponen x dan komponen y merupakan fungsi ganjil dari  $x'$  dan  $y'$  masing-masingnya. Dengan demikian

$$E = \frac{\hat{\sigma} z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} z dx' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

Hasil integral kedua adalah

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{(x'^2 + z^2)}$$

Sehingga diperoleh

$$E = \frac{2\hat{\sigma} z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dx'}{x'^2 + z^2} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} \right) \hat{z} \quad (2-36)$$

**Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini bersama kelompokmu! Gunakan referensi yang relevan**

- 2.1 Dua belas muatan  $q$  yang sama, terletak pada masing-masing sudut poligon 12 samasisi. Tentukan gaya total yang dialami muatan  $Q$  yang terletak di titik pusat poligon tersebut. (Bayangkan sebuah jam dengan 12 angka).
- 2.2 Jika satu muatan  $q$  pada soal nomor 1 dihilangkan, tentukan gaya total yang dialami  $Q$  di di pusat poligon 12 samasisi tersebut. Anggaplah muatan pada angka 6 yang diambil. Apa pendapatmu tentang jawaban soal 1 dan 2 ini.
- 2.3 Hitunglah medan listrik pada jarak  $z$  di atas salah satu ujung dari segmen garis sepanjang  $L$  seperti pada gambar yang mempunyai muatan garis serbasama  $\lambda$ . Uji persamaan yang anda peroleh untuk kasus  $z \gg L$ .
- 2.4 Hitunglah medan listrik pada jarak  $z$  di atas pusat kawat melingkar berjari-jari  $r$ , dan mempunyai muatan garis serbasama  $\lambda$ .
- 2.5 Hitunglah medan listrik pada jarak  $z$  di atas pusat piringan berjari-jari  $r$  yang mempunyai muatan permukaan serbasama  $\sigma$ . Bagaimana nilai  $E$  untuk kasus  $R \gg z$ .