

# M.K. LISTRIK MAGNET

## JOBSHEET 7

### MEDAN ELEKTROSTATIK DALAM BAHAN

Sebuah bahan dapat dipandang sebagai kumpulan muatan positif dan negatif dari penyusun atom yaitu inti dan elektron. Bahan terdiri dari atom-atom dan molekul-molekul yang memiliki jumlah muatan positif dan negatif yang sama sehingga momen dipolnya nol. Untuk bahan yang bersifat dielektrik muatannya tidak dapat bergerak bebas, seperti muatan pada bahan konduktor, sehingga muatannya disebut muatan terikat.

#### 4.1 POLARISASI

Jika tidak ada medan listrik maka muatan negatif sebuah molekul terdistribusi secara simetris sekitar inti positif, dikatakan bahwa momen dipolnya nol. Jika ada medan listrik, medan ini akan melakukan gaya terhadap muatan, di mana muatan positif akan bergerak searah medan sedangkan muatan negatif bergerak dalam arah yang berlawanan. Molekulnya sekarang memiliki momen dipol induksi dan bahan dikatakan mengalami polarisasi. Rapat momen dipol listrik atau momen dipol listrik persatuan volume dinyatakan dengan vektor polarisasi  $\mathbf{P}$ . Momen dipol listrik dalam unsur volume  $d\tau$  adalah  $dp$

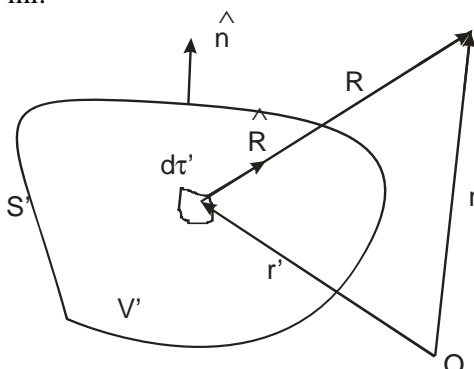
$$dp = \mathbf{P}(r) d\tau \quad (4-1)$$

Momen dipol total dalam volume  $V$

$$p_{total} = \int_V \mathbf{P}(r) d\tau \quad (4-2)$$

#### 4.2 RAPAT MUATAN TERIKAT

Untuk menghitung potensial yang dihasilkan oleh momen dipol pada suatu titik  $P$  di luar bahan perhatikan Gambar 4.1 berikut ini.



Gambar 4.1. Perhitungan potensial diluar bahan yang terpolarisasi.

Potensial pada titik  $P$  oleh  $dp$

$$dW = \frac{dp' \cdot \hat{R}}{4fV_0 R^2} = \frac{P(r') \cdot \hat{R} d\ddagger'}{4fV_0 R^2} \quad (4-3)$$

dimana  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

Potensial total adalah

$$W(r) = \int_{V'} \frac{P(r') \cdot \hat{R} d\ddagger'}{4fV_0 R^2} = \frac{1}{4fV_0} \int_{V'} P(r') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) d\ddagger' \quad (4-4)$$

Dari hubungan

$$P \cdot \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\nabla' \cdot P}{R} + \nabla' \cdot \left( \frac{P}{R} \right) \quad (4-5)$$

persamaan (4-4) menjadi

$$\begin{aligned} W(r) &= \frac{1}{4fV_0} \int_{V'} \frac{(-\nabla' \cdot P) d\ddagger'}{R} + \frac{1}{4fV_0} \int_{V'} \nabla' \cdot \left( \frac{P}{R} \right) d\ddagger' \\ &= \frac{1}{4fV_0} \int_{V'} \frac{(-\nabla' \cdot P) d\ddagger'}{R} + \frac{1}{4fV_0} \int_{S'} \frac{P \cdot \mathbf{n}' da'}{R} \end{aligned} \quad (4-6)$$

yang diperoleh dengan menggunakan teorema divergensi.

Dari (4-6) terlihat bahwa potensial  $\phi$  adalah dihasilkan oleh rapat muatan volume terikat  $\rho_b$  yang terdistribusi pada seluruh volume  $V'$  dan rapat muatan permukaan terikat  $\sigma_b$  yang terdapat pada permukaan  $S'$  yang menyelubungi volume tersebut, dimana

$$\dots_b = -\nabla' \cdot \mathbf{P} \quad (4-7)$$

$$\dagger_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = Pn \quad (4-8)$$

Dengan demikian maka (4-6) dapat ditulis

$$W(r) = \frac{1}{4fV_0} \int_{V'} \frac{\dots_b d\ddagger'}{R} + \frac{1}{4fV_0} \int_{S'} \frac{\dagger_b da'}{R} \quad (4-9)$$

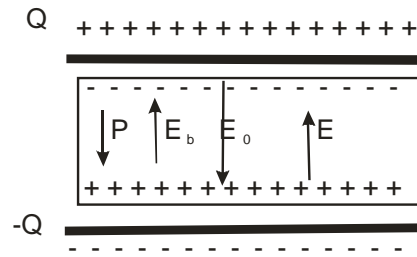
Biasanya dalam bentuk yang lebih umum (4-7) ditulis sebagai

$$\dots_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4-10)$$

### 4.3 MEDAN LISTRIK DALAM DIELEKTRIK

Ada beberapa cara untuk menentukan medan listrik dalam suatu dielektrik. Cara yang paling sederhana adalah mengukur potensial dan sekaligus juga medan listrik di dalam suatu dielektrik.

Misalkan sebuah kapasitor pelat sejajar diberi muatan  $Q$ , mula-mula belum berisi dielektrik, kemudian diisi dielektrik diantara kedua pelat konduktornya seperti pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2. Muatan dan medan dalam kapasitor pelat sejajar.

Muatan kapasitor  $Q$  dan perbedaan potensial dalam vakum  $\Delta\phi_0$ . Kapasitansi kapasitor adalah

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta W_0} \quad (4-11)$$

Setelah diisi dielektrik,  $Q$  dijaga konstan dengan cara melepaskan kapasitor dari sumber tegangan. Perbedaan potensial sekarang adalah  $\Delta\phi$ . Kapasitansi kapasitor sekarang adalah

$$C = \frac{Q}{\Delta W} \quad (4-12)$$

Ternyata  $\Delta\phi < \Delta\phi_0$ , jelaslah bahwa

$$C > C_0 \quad (4-13)$$

Terjadinya penurunan potensial ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Perbedaan potensial awal dapat ditulis

$$\Delta W_0 = \int_{+}^{-} E_0 \cdot ds = E_0 d \quad (4-14)$$

Perbedaan potensial akhir

$$\Delta W = E d \quad (4-15)$$

Karena  $\Delta\phi < \Delta\phi_0$ , sementara  $d$  konstan maka

$$E < E_0 \quad (4-16)$$

Penurunan medan listrik ini karena kehadiran dielektrik. Jika dielektrik terpolarisasi seragam  $P$  tetap, maka  $\rho_b = 0$ . Muatan terikat permukaan  $\sigma_b$  dihasilkan pada kedua sisi permukaan pelat sama besar tetapi dengan tanda yang berlawanan, sehingga menghasilkan medan listrik  $E_b$  dengan arah seperti Gambar 4.2. Karena  $Q$  masih menghasilkan medan  $E_0$ , maka medan resultan  $E$ ,

$$E = E_0 - E_b \quad (4-17)$$

sehingga  $E < E_0$ , sesuai dengan (4-16).

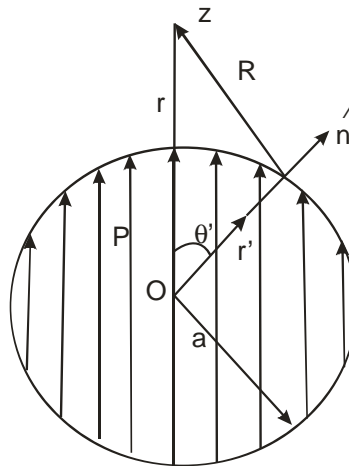
#### 4.4 BOLA TERPOLARISASI SERAGAM

Misalkan sebuah bola dielektrik terpolarisasi seragam  $\mathbf{P} = P \hat{z}$ . Karena  $\mathbf{P}$  konstan maka  $\rho_b = 0$ ,  
 Juga  $\hat{n}' = \hat{r}$  maka

$$\dagger_b(\theta') = P \cos \theta' \quad (4-18)$$

Dari Gambar 4.3 terlihat bahwa

$$R = (z^2 + a^2 - 2za \cos \theta')^{1/2} \quad (4-19)$$



Gambar 4.3. Bola terpolarisasi seragam.

Dari (4-9)

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{P \cos \theta' a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'}{(z^2 + a^2 - 2za \cos \theta')^{1/2}} \\ &= \frac{Pa^2}{2\epsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{udu}{(z^2 + a^2 - 2zau)^{1/2}} \end{aligned} \quad (4-20)$$

yaitu dengan melakukan perubahan variabel  $\cos \theta' = u$ . Hasil integral diperoleh dari tabel integral

$$-\frac{(z^2 + a^2 + zau)(z^2 + a^2 - 2zau)^{1/2}}{3z^2 a^2} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{3z^2 a^2} [(z^2 + a^2)(|z + a| - |z - a|) - za(|z + a| + |z - a|)] \quad (4-21)$$

Terdapat 2 kasus :

- (1) Di luar bola. Disini  $z > a$  dan  $|z - a| = z - a$  juga  $|z + a| = z + a$  karena  $z$  dan  $a$  positif. Dengan demikian (4-21) menjadi  $2a/3z^2$ , sehingga (4-20) menjadi

$$W_o(z) = \frac{Pa^3}{3V_0 z^2} \quad (4-22)$$

dan karena itu

$$E_{zo}(z) = -\frac{\partial W_o}{\partial z} = \frac{2Pa^3}{3V_0 z^3} \quad (4-23)$$

Jika dinyatakan dalam momen dipol total  $p$  dari (4-2)

$$p = \frac{4}{3} f a^3 P \hat{z} \quad (4-24)$$

maka (4-22) dan (4-23) dapat ditulis

$$W_o(z) = \frac{P}{4fV_0 z^2} \quad (4-25)$$

$$E_{zo}(z) = \frac{2p}{4fV_0 z^3} \quad (4-26)$$

- (2) Di dalam bola. Disini  $z < a$  dan  $|z - a| = a - z$  juga  $|z + a| = z + a$  karena  $z$  dan  $a$  positif. Dalam kasus ini (4-21) menjadi  $2z/3a^2$ , sehingga (4-20) menjadi
- (3)

$$W_i(z) = \frac{Pz}{3V_0} \quad (4-27)$$

dan karena itu

$$E_{zi}(z) = -\frac{\partial W_i}{\partial z} = \frac{P}{3V_0} \quad (4-28)$$

**Jawablah pertanyaan berikut ini bersama kelompokmu. Gunakan referensi yang relevan.**

4.1 Sebuah bola berjari-jari  $R$  membawa polarisasi

$$P = kr$$

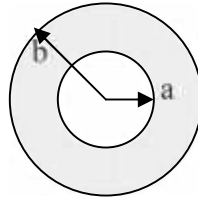
Di mana  $k$  adalah tetapan dan  $r$  adalah vektor posisi.

- (a) Hitunglah rapat muatan terikat  $\sigma_b$  dan  $\rho_b$ .  
 (b) Carilah medan listrik di dalam dan di luar bola.

4.2 Sebuah kulit bola tebal (jari-jari dalam  $a$  dan jari-jari luar  $b$ ) diisi dengan bahan dielektrik yang mempunyai polarisasi

$$\mathbf{P} = \frac{k}{r} \hat{r}$$

di mana  $k$  adalah tetapan dan  $r$  adalah jarak dari pusat seperti pada gambar



Cari kuat medan pada ketiga daerah.

4.3 Sebuah lempeng bahan memiliki dua permukaan paralel. Salah satunya terletak pada bidang  $xy$  sedang yang lainnya terletak pada  $z = t$ . Bahan memiliki polarisasi yang tidak seragam

$$\mathbf{P} = P(1 + rz)\hat{z}$$

dimana  $P$  dan  $t$  adalah suatu konstanta.

- Tentukan rapat muatan volume dan permukaan terikat.
  - Tentukan rapat muatan total dalam sebuah silinder dari bahan tersebut yang memiliki luas penampang  $A$  dan sisi paralel dengan sumbu  $z$ .
- 4.4 Tentukan potensial dan medan listrik  $E$  pada sumbu bola dipolarisasi seragam untuk harga  $z$  negatif.

4.5 Sebuah bola berjari-jari  $a$  memiliki sebuah polarisasi radial

$$\mathbf{P} = \Gamma r^n \hat{r}$$

dimana  $\Gamma$  dan  $n$  adalah konstanta dan  $n > 0$ .

- Tentukan rapat muatan terikat volume dan permukaan.
- Tentukan kuat medan  $E$  di luar dan di dalam bola.
- Tentukan potensial di luar dan di dalam bola.